Didaktische Behandlung störungstheoretischer Fragen

Inauguraldissertation
der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

Vorgelegt von

Armin Linder
von Wallenstadt

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn Prof. Dr. S. Mauderli angenommen.

Bern, den 9. Juni 1943.

Der Dekan:
Prof. Signer.

Graphische Anstalt Schüler A. G., Biel 1944

Didaktische Behandlung störungstheoretischer Fragen

Inauguraldissertation
der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

Vorgelegt von

Armin Linder
von Wallenstadt

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn Prof. Dr. S. Mauderli angenommen.

Bern, den 9. Juni 1943.

Der Dekan:
Prof. Signer.

Graphische Anstalt Schüler A. G., Biel 1944

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

I. E I N L E I T U N G .

Aus didaktischen Gründen ist es wünschenswert die Differentialgleichungen der Störungstheorie soweit zu vereinfachen, dass die elementaren Fragen über die Planetentheorie (periodische und säkulare Störungsglieder, Kommensurabilitäten, oskulierende und mittlere Elemente) ohne umfangreiche Rechnungen auf anschauliche Weise beantwortet werden können. Die Vereinfachung ist bis zur äussersten Grenze durchzuführen, d.h. ohne dass die wesentlichsten Züge der Störungstheorie verloren gehen. Es hat sich gezeigt, dass am einfachsten von den speziellen Störungen in den Bahnelementen ausgegangen wird.

Wir betrachten einen Zentralkörper M (Sonne), den gestörten Körper m (mit verschwindender Masse, kleiner Planet) und den störenden Körper m_1 (Jupiter). Die auf den gestörten Körper bezüglichen gestörten Grössen werden ohne Index, die ungestörten Grössen mit dem Index "o", die auf den störenden Körper bezüglichen Grössen mit dem Index "1" bezeichnet.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem (ξ,η,ζ) zu Grunde mit dem Ursprung im Sonnenmittelpunkt.

ξ -Achse in Richtung des Radiusvektor von m;

η -Achse senkrecht zur ξ -Achse in der Bahnebene in Richtung wachsender Längen.

ζ -Achse senkrecht zur (ξ,η)-Ebene positiv nach Norden.

Die störende Kraft zerlegen wir gemäss dem rechtwinkligen Koordinatensystem (ξ,η,ζ) in ihre Komponenten:

$$S \ , \ T \ , \ W$$

Bezeichnungen:

a	grosse Halbachse
L	mittlere Länge
μ	mittlere tägliche Bewegung
i	Neigung in Bezug auf die Ekliptik
J_1	Neigung der Bahnebene des störenden Körpers in Bezug auf die Bahnebene des gestörten Körpers.
Ω	Knotenlänge
e	Exzentrizität
π	Perihellänge
v	wahre Anomalie
u	Argument der Breite
k	Gravitationskonstante

2. Die Komponenten der störenden Kraft.

Die Komponenten der störenden Kraft sind

$$S = k^2 m_1 \left(\frac{\xi_1 - \xi}{\Delta^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3} \right)$$

$$T = k^2 m_1 \left(\frac{\eta_1 - \eta}{\Delta^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3} \right)$$

$$W = k^2 m_1 \left(\frac{\zeta_1 - \zeta}{\Delta^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3} \right)$$

Nach Voraussetzung sind die Koordinaten von m $(\xi = r, o, o)$,

damit wird

$$S = k^2 m_1 \left(\frac{\xi_1 - \xi}{\Delta^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3} \right)$$

$$T = k^2 m_1 \left(\frac{\eta_1}{\Delta^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3} \right)$$

$$W = k^2 m_1 \left(\frac{\zeta_1}{\Delta^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3} \right)$$

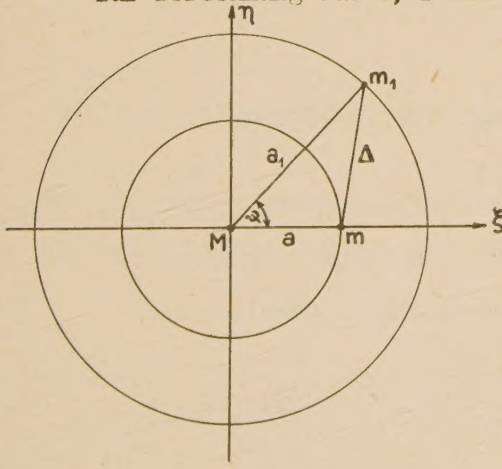
mit r_1 = Abstand zwischen Zentralkörper und störendem Körper

r = Abstand zwischen Zentralkörper und gestörtem Körper

Δ = Abstand zwischen gestörtem Körper und störendem Körper.

Vereinfachende Annahme.

Zur Berechnung von S, T und W nehmen wir für m und m_1 Kreisbahnen an, die zudem für die Berechnung von S und T noch in einer Ebene liegen sollen. Dabei geht r über in a_o und r_1 über in a_1.



Ferner ist

$$\frac{\xi_1}{a_1} = \cos\psi \qquad \frac{\eta_1}{a_1} = \sin\psi$$

$$\Delta = \sqrt{a_1^2 + a_0^2 - 2\,a_1\,a_0\cos\psi}$$

$$= a_1\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\,\alpha\cos\psi}$$

$$= a_1\,\vartheta$$

mit

$$\alpha = \frac{a_0}{a_1}\,; \qquad \vartheta = \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\psi}$$

Die Komponenten der störenden Kraft heissen unter diesen vereinfachenden Annahmen

$$S = k^2 m_1 \left\{ \frac{\xi_1 - a_0}{a_1^3\,\vartheta^3} - \frac{\cos\psi}{a_1^2} \right\}$$

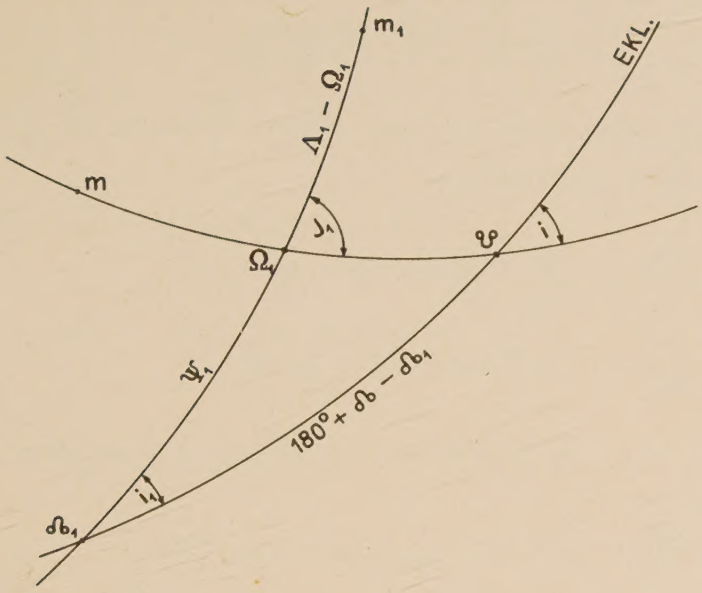
$$= k^2 m_1 \frac{1}{a_1^2} \left\{ \frac{\cos\psi - \alpha}{\vartheta^3} - \cos\psi \right\}$$

$$\underline{S = k^2 m_1 \frac{1}{a_1^2} \left\{ \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right)\left(\cos\psi - \alpha\right) - \alpha \right\}}$$

Ebenso wird

$$T = k^2 m_1 \frac{1}{a_1^2} \left\{ \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) \sin\psi \right\}$$

Für die Berechnung der Kraftkomponente W darf die Neigung der Bahn des störenden Körpers in Bezug auf den gestörten Körper nicht vernachlässigt werden.



$$\zeta_1 = a_1 \sin J_1 \sin (\Lambda_1 - \Omega_1)$$

$$W = k^2 m_1 a_1 \sin J_1 \left\{ \frac{1}{a_1^3 \vartheta^3} - 1 \right\} \sin (\Lambda_1 - \Omega_1)$$

$$W = k^2 m_1 \sin J_1 \frac{1}{a_1^2} \left\{ \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) \sin (\Lambda_1 - \Omega_1) \right.$$

$$\Lambda_1 - \Omega_1 = L_1 - \delta b_1 - \Psi_1$$

Aus dem sphärischen Dreieck $\delta b_1\ \Omega_1\ \vartheta$

lassen sich Ψ_1 und J_1 berechnen.

3. Die Differentialgleichungen für die gestörten Elemente.

Die Differentialgleichungen für die Elemente des gestörten Körpers lauten:

$$\text{I.}\quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{3k}{\sqrt{a}}\frac{\sin\varphi}{p}\sin\upsilon\,(S) - \frac{3k}{\sqrt{a}}\frac{1}{r}\,(T)$$

$$\text{II.}\quad \frac{dL_o}{dt} = -\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cos\upsilon + 2\frac{r}{p}\cos\varphi\right)(S)$$

$$+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,(\sin\upsilon+\sec\varphi\sin E)\,(T) + \operatorname{tg}\frac{i}{2}\frac{r}{p}\sin u\,(W)$$

$$\text{III.}\quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin\upsilon}{\cos\varphi}\,(S) + \frac{1}{\cos\varphi}\,(\cos\upsilon+\cos E)\,(T)$$

$$\text{IV.}\quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{\cos\upsilon}{\sin\varphi}\,(S) + \frac{1}{\sin\varphi}\,(\sin\upsilon+\sec\varphi\sin E)\,(T)$$

$$+\operatorname{tg}\frac{i}{2}\frac{r}{p}\sin u\,(W)$$

$$\text{V.}\quad \frac{di}{dt} = \frac{r}{p}\cos u\,(W)$$

$$\text{VI.}\quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin i}\,(W)$$

mit $(S) = \frac{\sqrt{p}}{k}\cdot S$

$(T) = \frac{\sqrt{p}}{k}\cdot T$

$(W) = \frac{\sqrt{p}}{k}\cdot W$

Unsere vereinfachende Annahme auf diese Differentialgleichungen angewandt ergibt, wenn noch ψ an Stelle von t als unabhängige Variable eingeführt wird $\frac{d\psi}{dt} = \mu_1 - \mu_o$

I. $\frac{d\mu}{d\psi} = -\frac{3k}{a^{3/2}}\{T\} = -3\mu_0\{T\}$

II. $\frac{dL_0}{d\psi} = -2\{S\}$

III. $\frac{d\varphi}{d\psi} = \sin v_0\{S\} + 2\cos v_0\{T\}$

IV. $e_0\frac{d\pi}{d\psi} = -\cos v_0\{S\} + 2\sin v_0\{T\}$

V. $\frac{di}{d\psi} = \cos u\{W\}$

VI. $\sin J_1\frac{d\delta b}{d\psi} = \sin u\{W\}$

mit $(\mu_1-\mu_0)\{S\} = \frac{\sqrt{a_0}}{k}\cdot S = m_1\mu_1''\sqrt{\alpha}\left[\left(\frac{1}{\vartheta^3}-1\right)(\cos\psi-\alpha)-\alpha\right]$

$(\mu_1-\mu_0)\{T\} = \frac{\sqrt{a_0}}{k}\cdot T = m_1\mu_1''\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\vartheta^3}-1\right)\sin\psi$

$(\mu_1-\mu_0)\{W\} = \frac{\sqrt{a_0}}{k}\cdot W = m_1\mu_1''\sin J_1\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\vartheta^3}-1\right)\sin(\Lambda_1-\Omega_1)$

wobei für $\frac{k''m_1\sqrt{a_0}}{a_1^2} = m_1\mu_1''\sqrt{\alpha}$

gesetzt wurde.

4. Diskussion der Komponenten der störenden Kraft.

In $\{S\}$, $\{T\}$ und $\{W\}$ tritt ψ in der Form

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\vartheta^3}-1\right)$$

auf, die wir in der Folge als " Amplitude " bezeichnen.

Da

$\vartheta = \sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\psi}$ eine periodische Funktion,

ist auch die Amplitude periodisch mit der Periode 2π.

a.) Nullstellen von $\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\vartheta^3}-1\right)$

Die Amplitude besitzt zwei Nullstellen und zwar bei

$\cos\psi = \frac{\alpha}{2}$ $(\alpha < 1$; für $a < a_1)$

also im I. und IV. Quadranten von ψ

für $\cos\psi < \frac{\alpha}{2}$ ist die Amplitude negativ

für $\cos\psi > \frac{\alpha}{2}$ ist die Amplitude positiv.

b.) Extremwerte von $\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\vartheta^3}-1\right)$

Für $\cos\psi = 1$ ist $\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\vartheta^3}-1\right) = \sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{(1-\alpha)^3}-1\right)$

ein Maximum

für $\cos\psi = -1$ ist $\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\vartheta^3}-1\right) = \sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{(1-\alpha)^3}-1\right)$

ein Minimum

Blatt stellt die Amplitude dar für die drei Werte

$$\alpha = \frac{2}{5}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{5}$$

Beim Vergleich dieser drei Kurven zeigt sich:

für kleine (grosse Werte von $(\mu_1-\mu_0)$ t und damit für grosse (Kleine) α ergibt sich eine langsame (rasche) Schwingung der Amplitude mit grossem (kleinem) Ausschlag.

Besonders einfach für die Diskussion sind die Komponenten der störenden Kraft $\{S\}$ und $\{T\}$

a.) $$\{S\} = \frac{m_1 \mu_1''}{\mu_1 - \mu_0} \sqrt{\alpha} \left[\left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) (\cos \psi - \alpha) - \alpha \right]$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer stellt den veränderlichen Teil der Störungskomponente dar.

$\sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right)$ bedeutet, die unter 4. besprochene Amplitude.

Die Amplitude ist multipliziert mit $\cos \psi - \alpha$. Amplitude und Cos-Funktion haben die gleiche Periode und Maximum der Amplitude und Maximum der Funktion fallen bei $\psi = 0^\circ$ zusammen. Das Produkt weisst daher an dieser Stelle den grössten Wert auf.

$$\left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) (\cos \psi - \alpha)$$

wird noch um den konstanten Betrag α verkleinert.

Extremwerte von $\sqrt{\alpha} \left[\left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) (\cos \psi - \alpha) - \alpha \right]$

und damit der störenden Kraft $\{S\}$

α.) bei $\psi = 0^\circ$ wird der variable Teil von $\{S\}$

$$\sqrt{\alpha} \left[\left(\frac{1}{(1-\alpha)^3} - 1 \right) (1 - \alpha) - \alpha \right] = \alpha^{3/2} \left[\frac{2 - \alpha}{(1-\alpha)^2} \right]$$ ein Maximum

β.) bei $\psi = 180^\circ$

$$\sqrt{\alpha} \left[\left(\frac{1}{(1-\alpha)^3} - 1 \right) (-1 - \alpha) - \alpha \right] = \alpha^{3/2} \left[\frac{2 - \alpha}{(1-\alpha)^2} \right]$$ ein Minimum

die Komponte der störenden Kraft $\{S\}$ hat ihren grössten Wert wenn die Planeten in Konjunktion stehen, ihren kleinsten Wert aber wenn sie Opposition stehen.

Es ist ferner $\{S\}$ eine periodische Funktion in ψ und

$$\{S\}(\psi) = \{S\}(-\psi)$$

$\{S\}$ ist also eine gerade Funktion von ψ und kann wie folgt dargestellt werden:

$$\{S\} = \lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \cos i\psi$$

$\{S\}$ ist in Fig. als Funktion der Zeit t aufgetragen.

b.) $$\{T\} = \frac{m_1 \mu_1''}{\mu_1 - \mu_0} \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) \sin \psi$$

Der veränderliche Teil der Komponente der störenden Kraft $\{T\}$, innerhalb der eckigen Klammer, wird gebildet durch die Amplitude

$$\sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right)$$

und die trigonometrische Funktion

$$\sin \psi$$

Amplitude wie Sin-Funktion haben hier wieder dieselbe Periode 2π. Bei $\psi = 0^\circ$ (180°) fallen Maximum der Amplitude und Nullstelle von $\sin \psi$ zusammen. Das Produkt aus den beiden Faktoren wird daher an dieser Stelle Null.

Nullstellen von $\sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) \sin \psi$

sind bei

$$\psi = 0^\circ ; \cos \psi = \frac{\alpha}{2} ; \psi = 180^\circ$$

Extremwerte von $\sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) \sin \psi$

können auf einfache Weise nicht direkt angegeben werden.

Es ist ferner $\{T\}$ eine periodische Funktion in ψ und

$$\{T\}(\psi) = -\{T\}(-\psi)$$

$\{T\}$ ist also eine ungerade Funktion von ψ und kann auf die Form gebracht werden

$$\{T\} = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \sin i\psi$$

$\{T\}$ ist in Fig. als Funktion der Zeit t aufgetragen.

c.) $$\{W\} = \frac{m_1 \mu_1'' \sin J_1}{\mu_1 - \mu_0} \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1\right) \sin(\Lambda_1 - \Omega_1)$$

Für nicht zu kleine i $(i \geq i_1)$ darf für

$(\Lambda_1 - \Omega_1)$ gesetzt werden

$$(\Lambda_1 - \Omega_1) = L_1 - \delta b_1 - \Psi_1 \sim L_1 - \delta b_1 - (180° + \delta b_0 - \delta b_1)$$

$$= L_1 - \delta b_0 - 180°$$

$$\{W\} = -\frac{m_1 \mu_1'' \sin J_1}{\mu_1 - \mu_0} \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1\right) \sin(L_1 - \delta b_0)$$

Nullstellen für

$$\sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1\right) \sin(L_1 - \delta b_0)$$

bei

$$L_1 = \delta b_0; \cos\psi = \frac{\alpha}{2}; L_1 = \delta b_0 + 180°$$

Extremwerte. Auch bei der Komponente der störenden Kraft $\{W\}$ senkrecht zur Bahnebene können die Extremalstellen nicht genau angegeben werden.

5. Diskussion der vereinfachten Differenzialgleichungen für die gestörten Elemente.

I. $\frac{d\mu}{d\psi} = -3\mu_0\{T\}$

Die Integration kann nach dem über $\{T\}$ gesagten durchgeführt werden

$$\Delta\mu = \int_{\psi_0}^{\psi} d\mu = -3\mu_0 \int_{\psi_0}^{\psi} \{T\}\, d\mu$$

$$= 3\mu_0 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{i} \cos i\psi + \nu_0\right]$$

$$\text{für } \nu_0 = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{i} \cos i\psi_0$$

Die Störung in μ und wegen

$$\mu = \frac{k}{a^{3/2}}$$

auch die Störung in a ist wieder eine periodische Funktion von ψ . Dieses Resultat war zu erwarten; denn auch unter viel allgemeineren Voraussetzungen treten in μ keine säkularen Störungsglieder auf.

II. $\frac{dL_0}{d\psi} = -2\{S\}$

Auch hier lässt sich die Integration ohne weiteres durchführen.

$$\Delta L_0 = \int_{\psi_0}^{\psi} dL_0 = -2\int_{\psi_0}^{\psi} \{S\}\, d\psi = -2\int_{\psi_0}^{\psi} \left[\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \cos i\psi\right] d\psi$$

$$= -2\lambda(\psi - \psi_0) - 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i} \sin i\psi + 2\varkappa_0$$

$$\text{für } \varkappa_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i} \sin i\psi_0$$

Es treten demnach in den Störungen von L_o säkulare Glieder auf.

Betrachten wir nun noch die mittlere Länge L

$$L = L_o + \int_{\psi_o}^{\psi} dL + \int_{\psi_o}^{\psi} (\mu_o + \Delta\mu)\, d\psi$$

$$L = L_o + \left[-2\lambda + \mu_o + 3\mu_o\nu_o\right](\psi - \psi_o) + \sigma_o + \text{period. Glieder}$$

wobei

$$\sigma_o = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i} \sin i\psi_o - 3\mu_o \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{i^2} \sin i\psi$$

Man kann nun

$$\mu_o(1 + 3\nu_o) - 2\lambda = \mu_{oo}$$

als mittlere mittlere tägliche Bewegung μ_{oo} ansehen. In L treten dann wieder nur periodische Glieder auf. Es ist aber zu beachten, dass die mittlere Halbachse nicht durch

$$\mu_{oo} = \frac{k}{a^{3/2}} \quad \text{gegeben ist}$$

sondern durch die Beziehung

$$\mu_o(1 + 3\nu_o) = \frac{k}{a^{3/2}}$$

Wir haben damit auf einfachste Art die Begriffe der mittleren Elemente für μ und a erläutert.

III. $$\frac{d\varphi}{d\psi} = \sin v_o \{S\} + \cos v_o \{T\}$$

IV. $$\frac{d\pi}{d\psi} = -\cos v_o \{S\} + \sin v_o \{T\}$$

Wir betrachten die auf den rechten Seiten auftretenden Summanden.

Es ist $$\psi = (\mu_1 - \mu_0)\,t$$

$$v_0 = w_0 + \mu_0 t = w_0 + \frac{\mu_0}{\mu_1 - \mu_0}\psi$$

w_0 = wahre Anomalie zur Zeit t_0.

In den obigen Gleichungen III und IV enthalten die Summanden: $\sin v_0 \{S\}$; $\cos v_0 \{T\}$

$-\cos v_0 \{S\}$; $\sin v_0 \{T\}$

Im Wesentlichen Ausdrücke von folgender Form

$$\sin i\psi \sin \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\cdot\psi = \frac{1}{2}\left[\cos\left(i - \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\right)\cdot\psi - \cos\left(i + \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\right)\cdot\psi\right]$$

$$\sin i\psi \cos \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\cdot\psi = \frac{1}{2}\left[\sin\left(i + \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\right)\cdot\psi + \sin\left(i - \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\right)\cdot\psi\right]$$

$$\cos i\psi \sin \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\cdot\psi = \frac{1}{2}\left[\sin\left(i + \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\right)\cdot\psi - \sin\left(i - \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\right)\cdot\psi\right]$$

$$\cos i\psi \cos \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\cdot\psi = \frac{1}{2}\left[\cos\left(i + \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\right)\cdot\psi + \cos\left(i - \frac{\mu_0}{\mu_1-\mu_0}\right)\cdot\psi\right]$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle.

α.) Es gibt

Kein $i = \dfrac{\mu_0}{\mu_1 - \mu_0}$ = ganze Zahl

Es gibt

β.) Ein $i = \dfrac{\mu_0}{\mu_1 - \mu_0}$ = ganze Zahl

Führt man im Falle von α.) die Integration über einen genügend grossen Zeitraum aus, so werden die Integrale dieser periodischen Funktionen

bald positive bald negative Werte durchlaufen, die sich aber im Mittel aufheben.

Im Falle von α.) treten in Wirklichkeit säkulare Störungen auf. Sie wurden aber durch Vernachlässigung der Exzentrizität unterdrückt. Exzentrizität und Perihellänge sind also nach unsern Annahmen nur periodischen Störungen unterworfen.

β.) Integriert man aber im Falle

$$i = \frac{\mu_0}{\mu_1 - \mu_0} = \frac{1}{1 - \frac{\mu_1}{\mu_0}} = \text{ganzzahlig}$$

über die Periode 2π, so ergeben sich neben solchen unter α.) angegebenen Integrale auch solche die nur von ψ und damit von der Zeit t abhängig sind (nämlich $\cos\left(i - \frac{\mu_0}{\mu_1 - \mu_0}\right)\cdot\psi = 1$). Es entstehen also hier der Zeit proportionale Glieder, säkulare Glieder.

Speziell gilt:

$i = 2 \qquad \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{1}{2}$ (Hekubatypus)

$i = 3 \qquad \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{2}{3}$ (Hildatypus)

Im Fall β.) haben wir spezielle Fälle von Kommensurabilität vor uns, deren Sonderstellung schon bei unseren vereinfachenden Annahmen deutlich wird.

V. $\frac{di}{d\psi} = \cos u \,\{W\}$

für $\{W\}$ den Ausdruck unter 4 c mit

$$L_1 - \delta b_1 - \Psi_1 \sim L_1 - \delta b_0 - 180°$$

gesetzt ergibt:

$$\frac{di}{d\psi} = -\frac{m_1 \mu_1'' \sin J_1}{\mu_1 - \mu_0} \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1\right) \sin\left(L_1 - \delta b_0\right) \cos\left(L - \delta b_0\right)$$

Aus dieser Gleichung ist zu entnehmen, dass die Neigung ein Maximum der Aenderung erleidet bei $L = \delta b_0$ wenn der Planet sich im Knoten befindet. Nach Anwendung der Summationsformel geht obige Gleichung über in

$$\frac{di}{d\psi} = -\frac{m_1 \mu_1'' \sin J_1}{\mu_1 - \mu_0} \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1\right) \frac{1}{2} \left\{\sin \psi + \sin\left(L_1 + L - 2\delta b_0\right)\right\}$$

Das Integral des Produktes

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1\right) \sin\left(L_1 - L - 2\delta b_0\right)$$

ausgeführt über eine lange Periode wird im Mittel Null wie, Analog den Untersuchungen über $\frac{d\varphi}{d\psi}$, $\frac{d\pi}{d\psi}$ zu beweisen wäre. Aber auch das Produkt

$\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1\right) \sin \psi$, ist eine ungerade periodische Fkt. und zeigt ähnliche Struktur wie $\frac{d\mu}{d\psi}$, so dass bei der Integration auch hier keine säkularen Glieder auftreten. Daraus ergibt sich als Resultat, dass die Neigung nur periodischen Störungen unterworfen ist.

VI. $\sin i \frac{d\delta b}{d\psi} = \sin u \{W\}$

für $\{W\}$ wieder den Ausdruck unter 4 c mit

$L_1 - \delta b_1 - \Psi_1 \sim L_1 - \delta b_0 - 180°$

gesetzt ergibt

$$\sin i \frac{d\delta b}{d\psi} = -\frac{m_1 \mu_1'' \sin J_1}{\mu_1 - \mu_0} \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1\right) \sin\left(L_1 - \delta b_0\right) \sin\left(L - \delta b_0\right)$$

Daraus ergibt sich, dass die Knotenlinie ihre stärkste Aenderung aufweist bei

$$L_1 = \delta b_0 + 90°$$

wenn der Planet sich bei $u = 90°$ befindet.

Die Differentialgleichung schreibt sich mit Hilfe der Summationsformeln

$$\sin i \frac{d\delta b}{d\psi} = -\frac{m_1 \mu_1'' \sin J_1}{\mu_1 - \mu_0} \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) \frac{1}{2} \left\{ \cos\psi - \cos(L_1 - L - 2\delta b_0) \right\}$$

Analoge Ueberlegungen zeigen auch hier, dass das Integral des Produktes

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) \cos(L_1 + L - 2\delta b_0)$$

sich im Mittel aufhebt.

Das Integral

$$\int \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) \cos\psi$$

gebildet über eine Periode verschwindet nicht. Man erhält ein in der Zeit proportionales Glied, d.h. es treten bei der Knotenlinie nebst periodischen auch säkulare Störungen auf.

Die Annäherung ist bei V Neigung und bei VI Knotenlänge durch Berücksichtigung der ersten Potenz von $\sin J_1$ um eine Stufe weiter getrieben worden als bei den übrigen Elementen.

Numerische Betrachtungen.

Die vereinfachten Differentialgleichungen der speziellen Störungen der Elemente wurden numerisch mit der Berechnung von genäherten Jupiterstörungen (Stracke VRJ) für den Planeten Eleutheria 567 (Rechnung von Herrn Dr. Schürer) verglichen. In den Figuren ist die vereinfachte Rechnung rot, die genäherte Störungsrechnung nach Stracke schwarz ausgeführt.

Es zeigt sich

a) eine bei allen Elementen vorkommende Verschiebung der Phase und

b) die damit zusammenhängenden wesentlichen Abweichungen der beiden Kurven voneinander während der Konjunktion der beiden Planeten.

Diese Verschiebung könnte durch Berücksichtigung der Mittelpunktsgleichung zum grossen Teile behoben werden.

Die Vernachlässigung der Exzentrizität (im besonderen des gestörten Körpers), bewirkt aber doch Abweichungen von 30% - 40%, so dass die Berechnung der Störungen mit diesen Vereinfachungen kaum in Frage kommt. Wohl aber kann sie nützliche Dienste leisten beim Abschätzen der Störungsbeträge, da der Arbeitsaufwand sehr gering ist und die Rechnungen mit dem Rechenschieber durchgeführt werden können.

Literaturverzeichnis:

1.) Sir George Biddell Airy: Die Gravitation eine elementare Erklärung der hauptsächlichsten Störungen im Sonnensystem Leipzig 1891

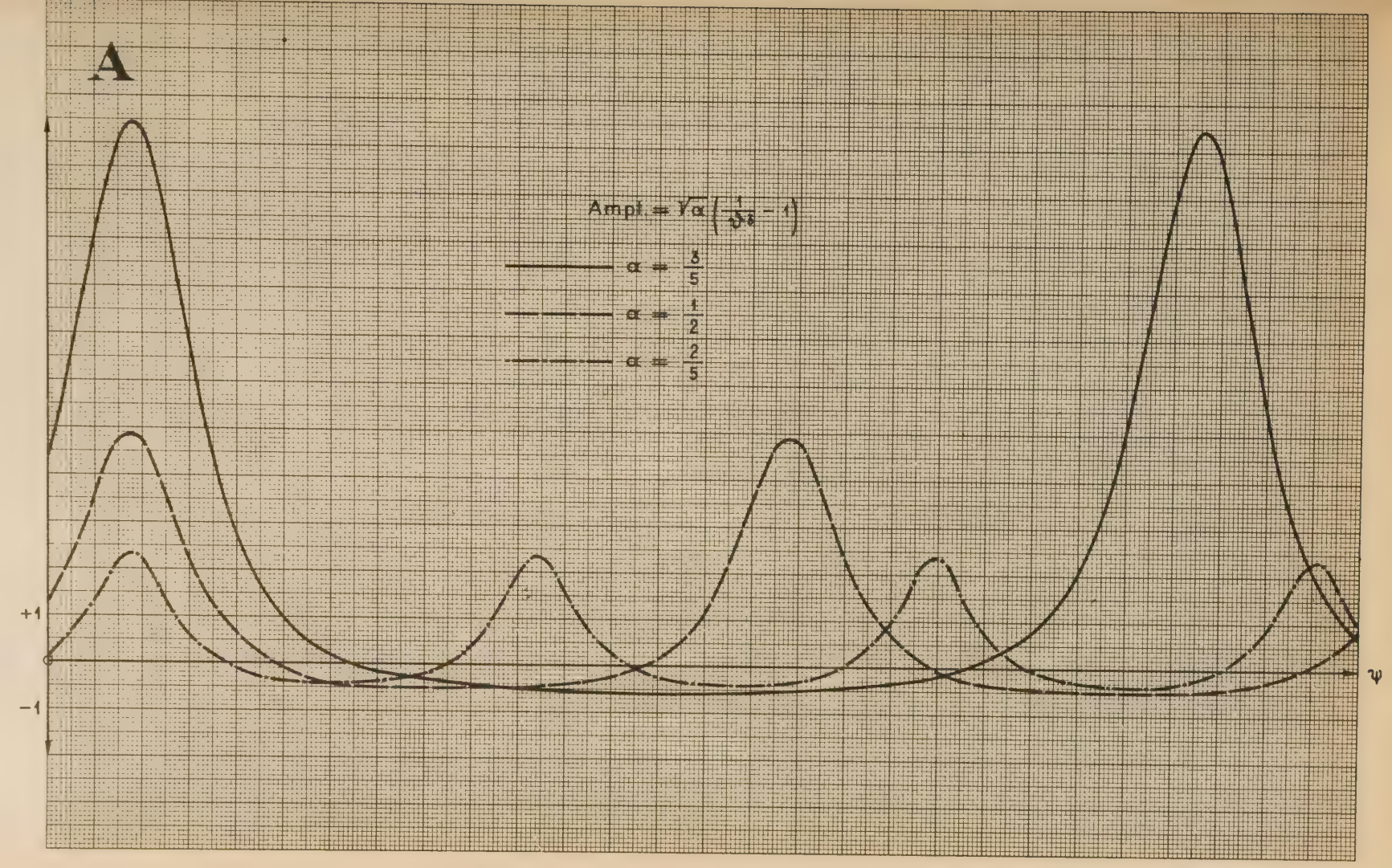
2.) F.R. Moulton: Einführung in die Himmelsmechanik Leipzig 1927

3.) E. und B. Strömgren: Lehrbuch der Astronomie Berlin 1933

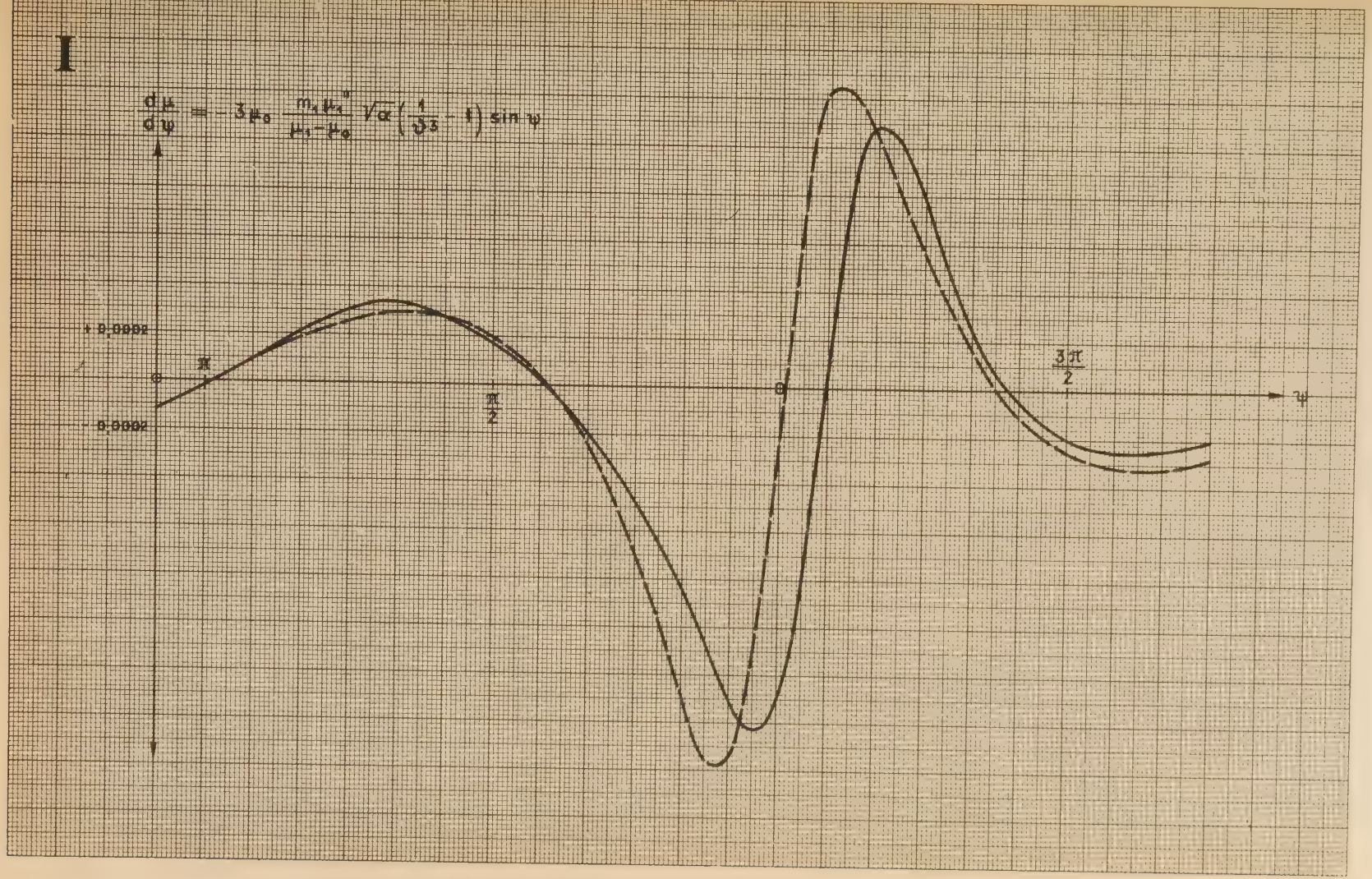
4.) G. Stracke: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen Berlin 1929

5.) S. Mauderli: Vorlesung: Grundprobleme der Himmelsmechanik 1938

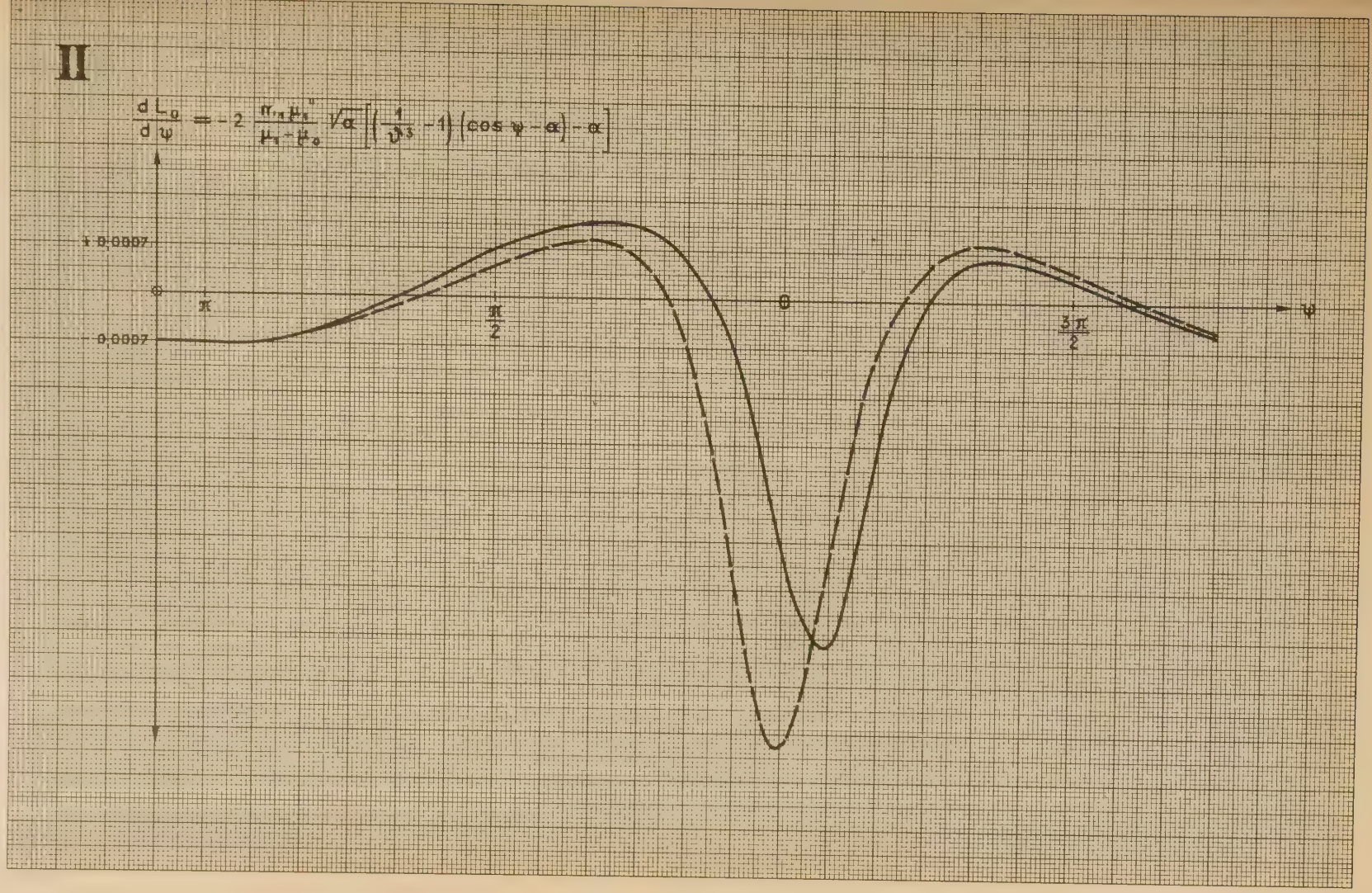
6.) S. Mauderli: Vorlesung: Ausgewählte Fragen der Himmelsmechanik 1939 .

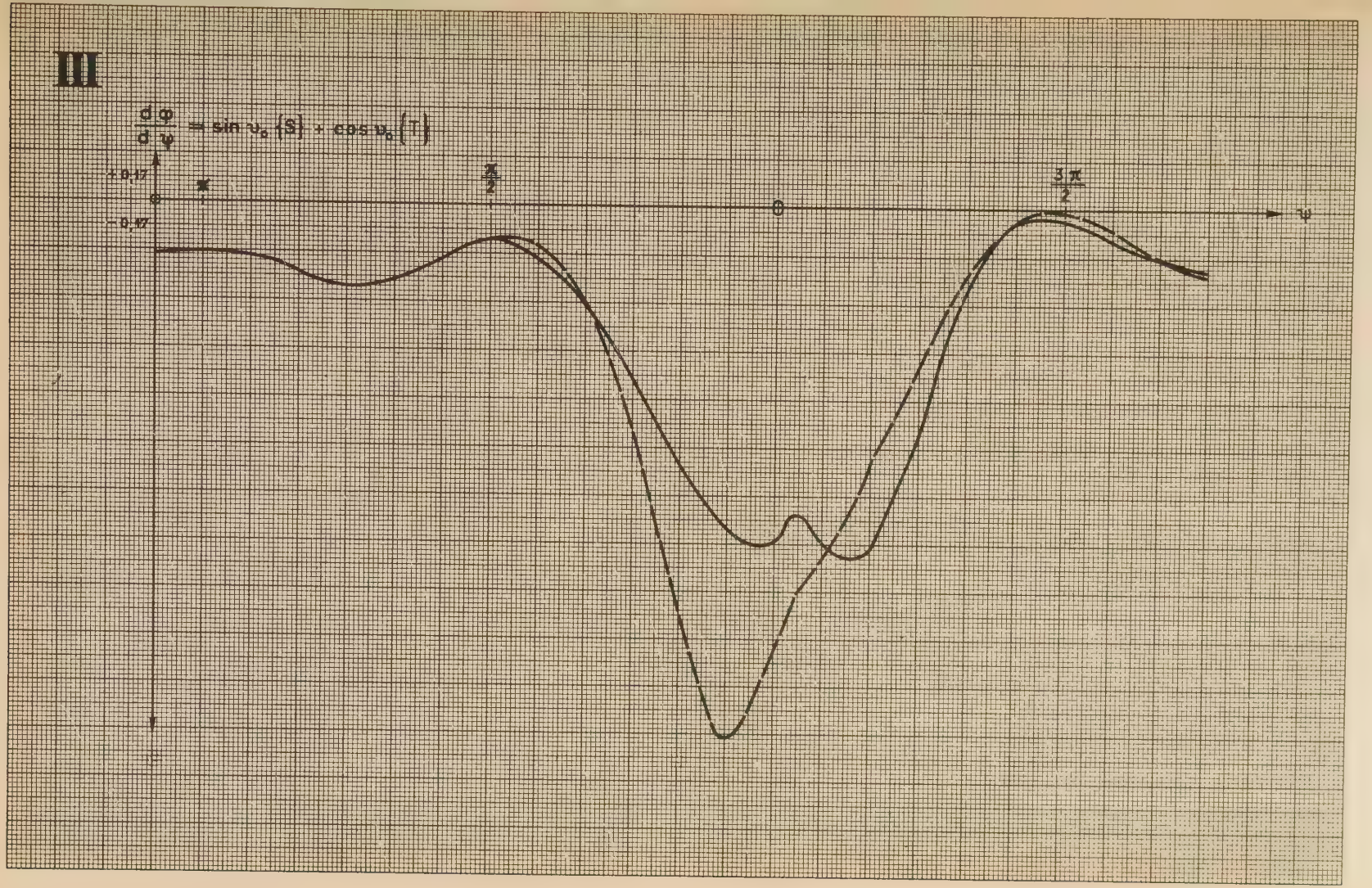

A
$\text{Ampl.} = \sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\vartheta^{\delta}} - 1\right)$
$\alpha = \frac{3}{5}$
$\alpha = \frac{1}{2}$
$\alpha = \frac{2}{5}$
+1
−1
ψ

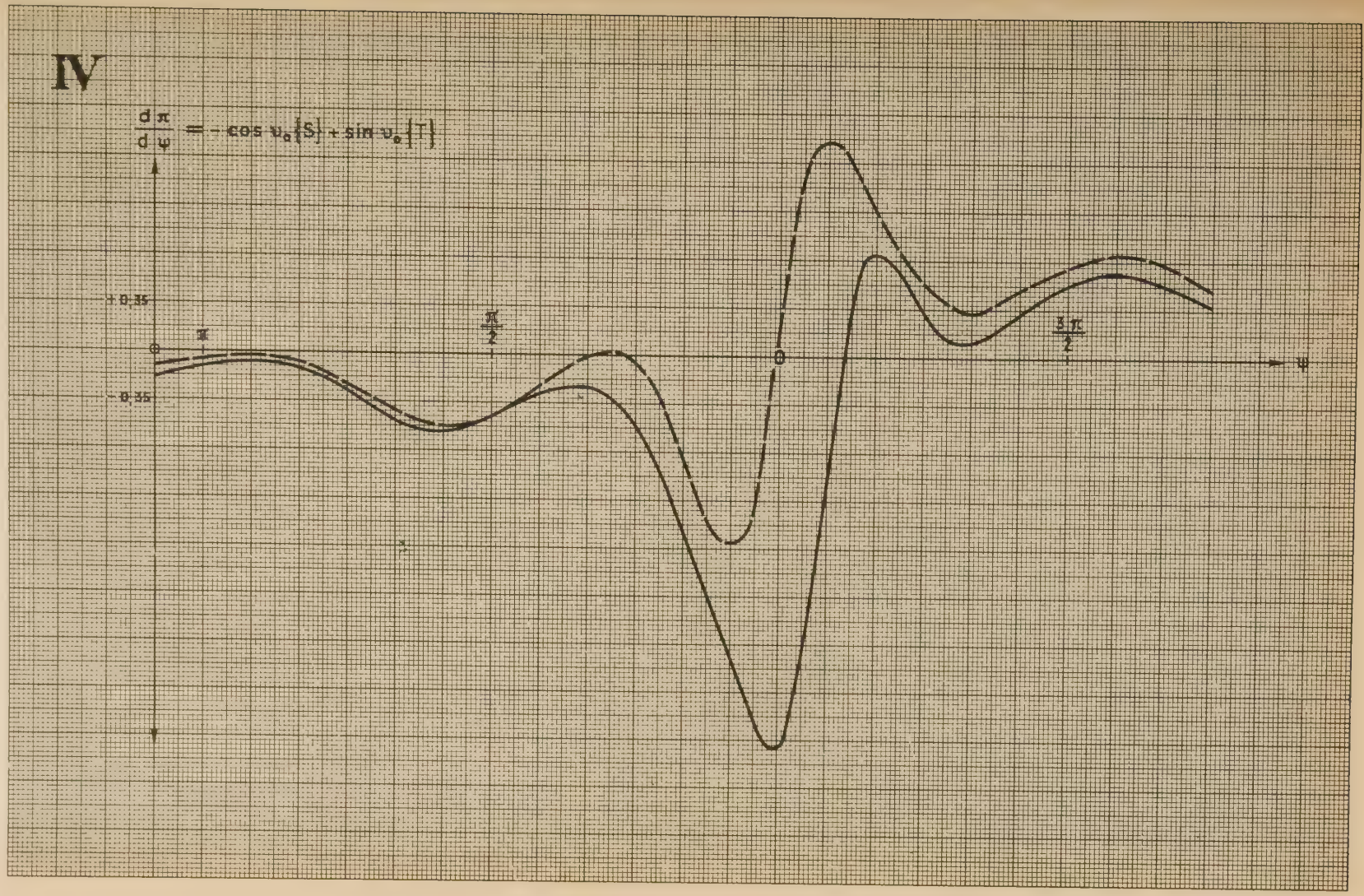
I


$\frac{d\mu}{d\psi} = -3\mu_0 \frac{m_1\mu_1''}{\mu_1-\mu_0}\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\vartheta^3}-1\right)\sin\psi$
+ 0,0002
0
- 0,0002
π
π/2
0
3π/2
ψ

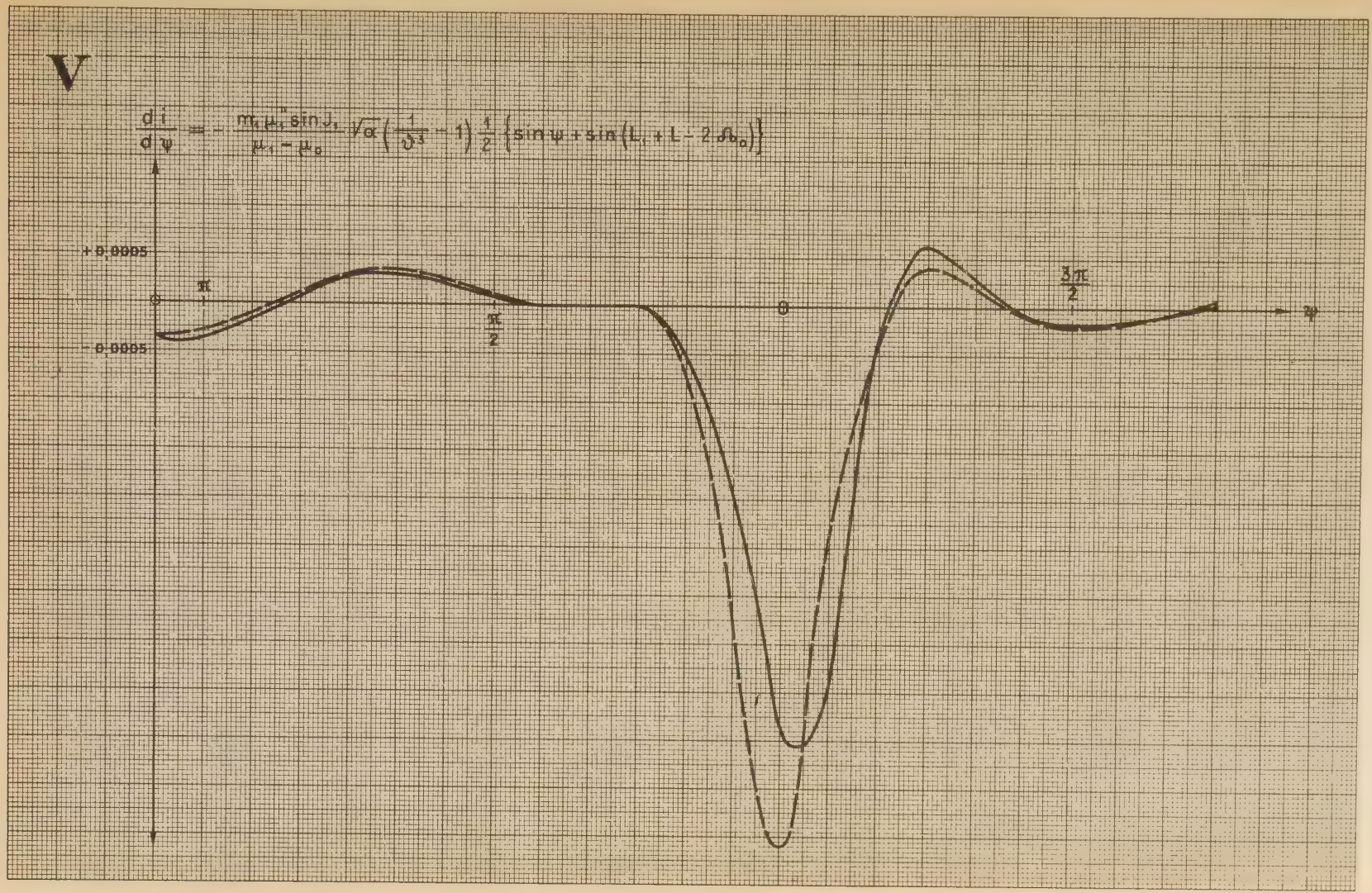
II


$\frac{dL_0}{d\psi} = -2\frac{\pi_1\mu_1''}{\mu_1-\mu_0}\sqrt{\alpha}\left[\left(\frac{1}{\vartheta^3}-1\right)(\cos\psi-\alpha)-\alpha\right]$
+ 0,0007
- 0,0007
0
π
$\frac{\pi}{2}$
θ
$\frac{3\pi}{2}$
ψ


III
$\frac{d\varphi}{d\psi} = \sin v_0 \{S\} + \cos v_0 \{T\}$
+ 0,17
0
− 0,17
π
$\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{3\pi}{2}$
ψ

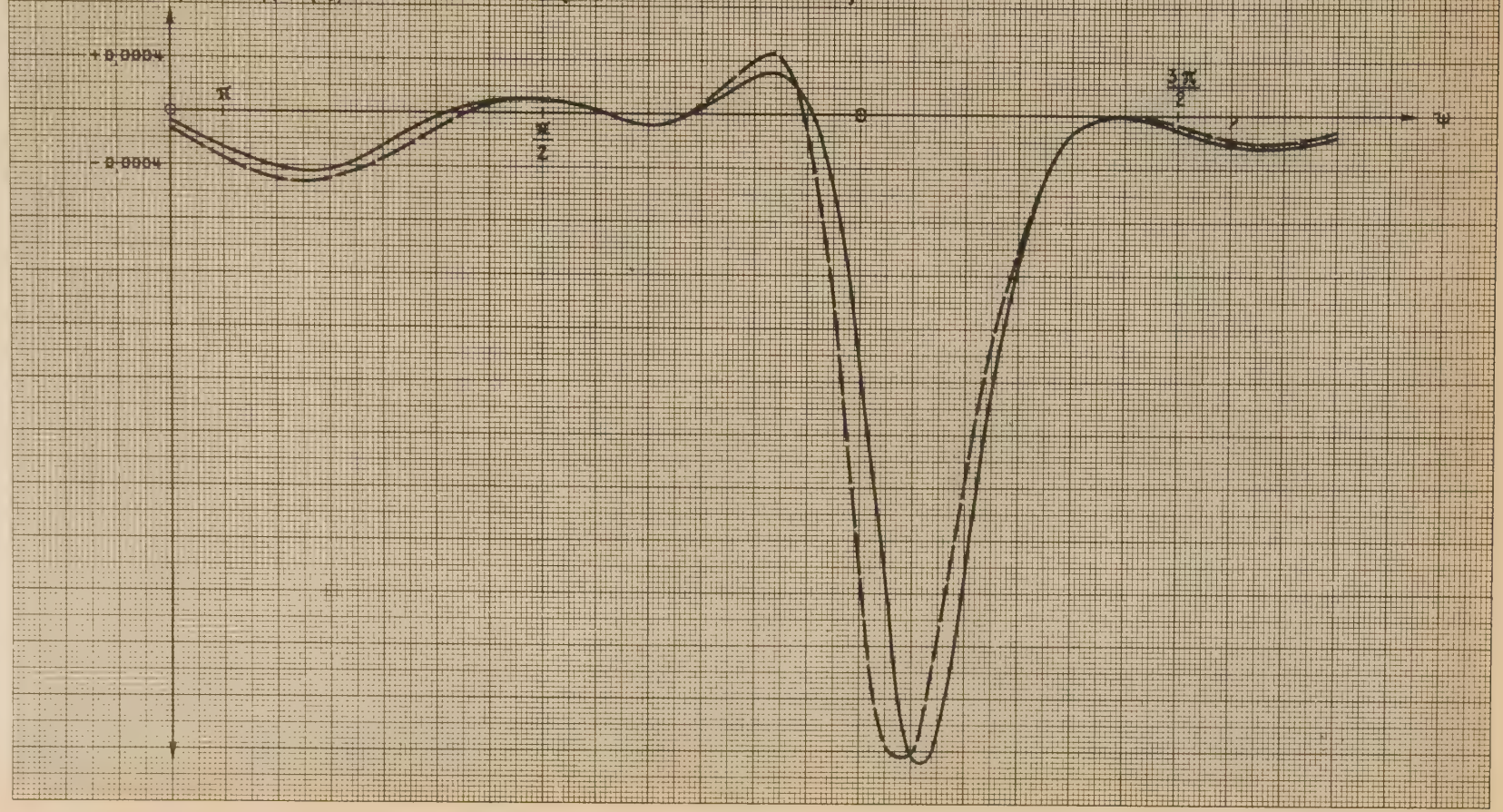

IV
$\frac{d\pi}{d\psi} = -\cos v_0 [S] + \sin v_0 [T]$
+0,35
-0,35
0
π
$\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{3\pi}{2}$
ψ

V


$\frac{di}{d\psi} = -\frac{m_1 \mu_1'' \sin J_1}{\mu_1 - \mu_0} \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{\vartheta^3} - 1 \right) \frac{1}{2} \left\{ \sin\psi + \sin\left(L_1 + L - 2\delta_{b_0} \right) \right\}$
+0,0005
-0,0005
0
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
ψ

VI

$$\frac{d\,\delta_b}{d\,\psi} = -\frac{m_1 \mu_1'' \sin J_s}{(\mu_1 - \mu_0)\sin i}\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\delta^3} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\psi - \cos\left(L_1 - L - 2\delta_b\right)\right\}$$



CURRICULUM VITAE.

Ich, Armin Linder, wurde am 19. Dezember 1914 in Wallenstadt geboren. Ich besuchte in Wallenstadt Primar- und Sekundarschule und nachher die Kantonsschule St. Gallen. Im Herbst 1934 immatrikulierte ich mich an der Universität Bern und studierte Astronomie, Mathematik und Physik. Unterrichtet haben mich in Astronomie die Herren Prof. Dr. S. Mauderli und Pd. Dr. M. Schürer, in Mathematik Prof. Dr. W. Scherrer, Prof. H. Hadwiger und Prof. Dr. W. Michel, in Physik Prof. Dr. H. Greinacher und Prof. Dr. P. Gruner.

Allen meinen Lehrern möchte ich für ihre ausgezeichnete Unterweisung meiner Studien meinen besten Dank aussprechen. Besonders fühle ich mich Herrn Prof. Dr. S. Mauderli zu Dank verpflichtet für seine, während meiner ganzen Studienzeit, in jeder Hinsicht wertvolle Unterstützung.